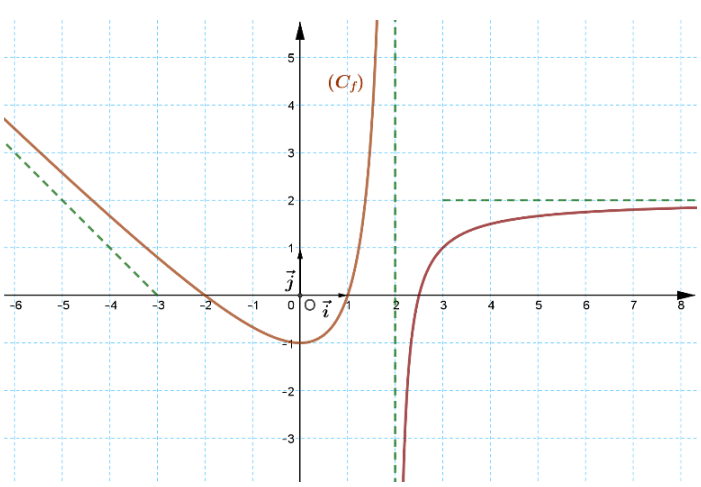
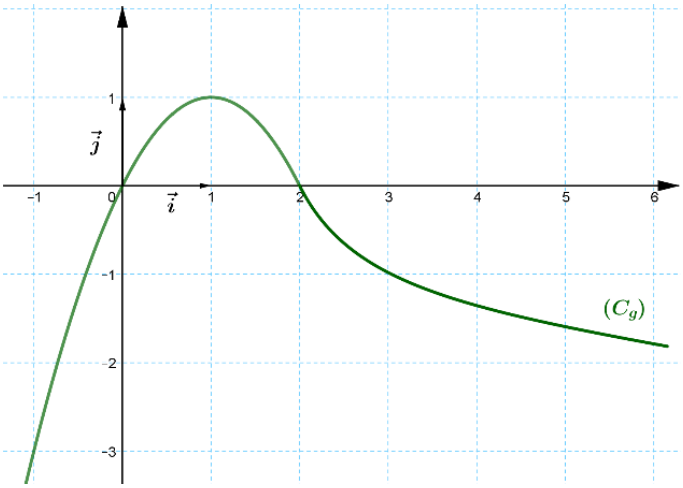
DEVOIR DE CONTROLE N°1

EXERCICE N°1 : | 25' | 6 points

Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies respectivement sur $IR\setminus\{2\}$ et sur IR.

- (C_f) admet trois asymptotes.
- (C_g) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.





1°) Par une lecture graphique :

a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)+x+3}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x)$,

et $f\left(]2,+\infty[\right)$.

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{g(x)}$, , $\lim\limits_{x\to2^+} g\circ f(x)$, et $g(IR)$

et $g\left(]2,+\infty[\right)$.

2°) La fonction $\dfrac{1}{f}$ est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

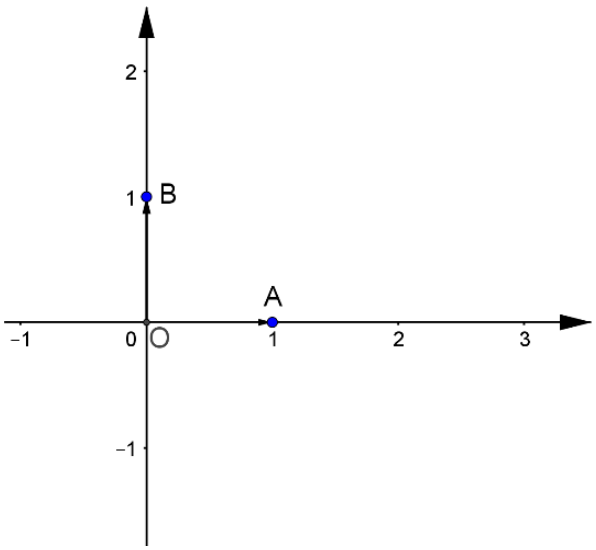
3°) a) Montrer que la fonction $f\circ g$ est continue sur IR.

b) Montrer que l'équation $f\circ g(x)=-\dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

EXERCICE N°2 : 15' 4 points

$(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé direct du plan.

Soit C le point d'affixe $c=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-i}$.



1°) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2°) Ecrire $1-i$ sous forme exponentielle ;

En déduire que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

3°) Construire le point C.

4°) Vérifier que $c-1=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$, en déduire $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

EXERCICE N°3 : 30' 5 points

Soit f la fonction définie sur IR par :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x^2+1} & \text{si } x<0 \\ f(x)=x^3+x-1 & \text{si } 0\le x\le 1 \\ f(x)=\sqrt{x-1}+x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

(C_f) étant sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Montrer que f est continue en 1.

2°) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. En déduire que f est discontinue à gauche en 0.

3°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=\pi$. Calculer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

5°) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0,1[$ une solution α.

b) Vérifier que $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$.

EXERCICE N°4 :	30'	5 points	

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(1)$, $B(i)$ et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

A tout point $M(z)$ distinct de *B*, on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{\overline{z} - i}{\overline{z} + i}$.

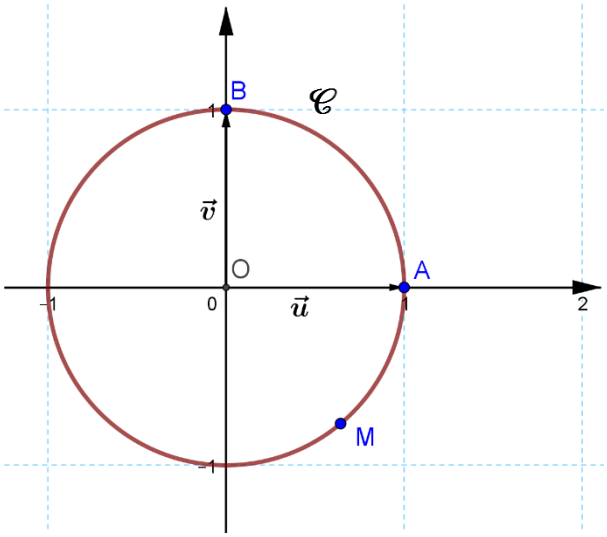
1°) Montrer que si *M* appartient à l'axe des réels alors *M'* appartient au cercle $\mathscr{C}$.

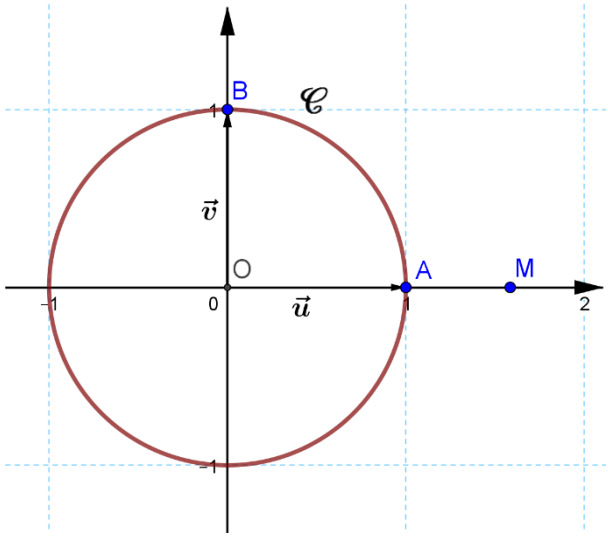
2°) a) Montrer que pour tout $z \neq i$ on a : $\overline{z}' = -z'$ si et seulement si $z\overline{z} = 1$.

b) En déduire que si *M* appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé du point B alors *M'* appartient à l'axe des imaginaires.

3°) Montrer que pour tout $z \neq i$, $\dfrac{z'-1}{z-i}$ est un nombre imaginaire. En déduire que les droites (AM') et (BM) sont perpendiculaires.

4°) Construire le point *M'* pour le point *M* donné dans les deux figures suivantes.





Tél : +216 29 862 229 / +216 29 862 464 - Email : contact@takiacademy.com